

Wstęp do programowania

Obliczenia numeryczne

Paweł Daniluk

Wydział Fizyki

Jesień 2013



Reprezentacja binarna liczb całkowitych

System dwójkowy

$$1101_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 13_{10}$$

Kodowanie liczb ujemnych:

- znak i wartość bezwzględna
- uzupełnienie do 1
- uzupełnienie do 2

Reprezentacja liczb rzeczywistych

$$0.101 = 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} = \frac{5}{8}$$

Liczby, które mają skończoną liczbę cyfr w systemie dziesiętkowym, mogą mieć rozwinięcie okresowe w dwójkowym.

$$\frac{1}{5} = 0.2_{10} = 0.00110011(0011)_2$$

Reprezentacja zmiennoprzecinkowa

$$m \cdot b^c$$

- m – mantysa (cyfry znaczące)
- c – cecha
- b – podstawa systemu liczbowego

Przykłady

- $9.109 \cdot 10^{-31}$ kg – masa elektronu
- $4 \cdot 10^7$ m – masa ziemi
- $1.04 \cdot 10^{12}$ PLN – dług publiczny Polski

Mantysa może być przechowywana w reprezentacji stałoprzecinkowej.

Reprezentacja zmiennoprzecinkowa c.d.

Przykład

$$\begin{aligned} 1038796445516 &= 1.038796445516 \cdot 10^{12} = \\ &= 1.1110001110111010001011111010111010011_2 \cdot 2^{39} \end{aligned}$$

- $m = 1.1110001110111010001011111010111010011_2$
- $c = 39_{10} = 100111_2$

Standard IEEE 754

0 10100110 11100011101110100010111

Uwagi

- cecha jest zwiększana o 127
- z mantysy obcinana jest pierwsza 1

Operacje na liczbach zmiennoprzecinkowych

Dodawanie

$$m_1 \cdot b^{c_1} + m_2 \cdot b^{c_2} = m_1 + (m_2 b^{c_2 - c_1}) \cdot b^{c_1}$$

Mnożenie

$$m_1 \cdot b^{c_1} \times m_2 \cdot b^{c_2} = m_1 m_2 \cdot b^{c_1 + c_2}$$

Jeżeli $|c_2 - c_1|$ jest większa niż liczba cyfr znaczących w mantysie, dodawanie nie powiedzie się.

$$L_1 \gg L_2 \implies L_1 + L_2 \cong L_1$$

Obliczenia numeryczne

Błędy numeryczne

- wynikające z niedokładności reprezentacji (*vide* poprzedni slajd)
- wynikające z niedokładności metody (np. całkowanie numeryczne)

Algorytm numerycznie stabilny

Małe zaburzenie danych wejściowych powoduje niewielkie zaburzenie wyniku.

Biblioteki do obliczeń numerycznych

- wygodne reprezentacje obiektów matematycznych (zwłaszcza wektorów i macierzy)
- operacje liniowe (dodawanie i mnożenie macierzy etc.)
- implementacje standardowych algorytmów numerycznych (wyznaczniki, wartości własne, rozkłady macierzy etc.)

NumPy

<http://www.engr.ucsb.edu/~shell/che210d/numpy.pdf>

<http://www.loria.fr/~rougier/teaching/numpy/numpy.html>

